LES EQUATIONS – INEQUATIONS

I- Généralité :

$2x - 7 = 4$ est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, représenté par la lettre x.
On dit que $2x - 7 = 4$ est une équation d'inconnue x.

Comment résoudre une équation d'inconnue x, c'est-à-dire comment chercher les valeurs de l'inconnue pour **lesquelles l'égalité est vraie ?**

1- Définition :

a et b sont deux nombres et a n'est pas nul. Une équation du premier degré à une inconnue est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax = b$, où x désigne l'inconnue.

***Remarque* :** on peut utiliser n'importe quelle lettre à la place de x (le plus souvent, on utilise x, y, z ou t).

***Exemples* :**

$3x = 7$ est une équation du premier degré d'inconnue x.

$-2,7t = 4,8$ est une équation du premier degré d'inconnue t.

$X + 4 = -3x + 7$ est également une équation du premier degré d'inconnue x, dont on verra qu'elle peut s'écrire $4x = 3$.
En revanche, $x^2 = 3$ n'est pas une équation du premier degré, car l'inconnue x figure au carré.

2- Méthode :

On utilise généralement les deux règles suivantes :

on ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres de l'équation ; ainsi $a + x = b$ équivaut à $a + x - a = b - a$ donc à $x = b - a$;

on ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou divise chaque membre de l'équation par un même nombre non nul ; ainsi $ax = b$ équivaut à $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ donc à $x = \frac{b}{a}$.

Remarque : une équation du premier degré à une inconnue admet en général une et une seule solution.

Exemple 1 :

On veut résoudre l'équation : $3x + 4 = 0$.
Retranchons 4 aux deux membres de cette équation. On obtient :

$3x + 4 - 4 = 0 - 4$
$3x = -4$

Multiplions chaque membre par $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times (-4)$

$X = -\frac{4}{3}$

$\frac{-4}{3}$ est la solution de l'équation $3x + 4 = 0$.

Exemple 2 :

On veut résoudre l'équation : $2x + 5 = 7$.
Retranchons 5 aux deux membres de cette équation.
On obtient :
$2x + 5 - 5 = 7 - 5$
$2x = 2$
Divisons par 2 chaque membre : $x = 1$
1 est la solution de l'équation $2x + 5 = 7$.

Exemple 3 :

On veut résoudre l'équation : $3\,(x + 2) = 5 - 4x$.
On développe d'abord le premier membre. On obtient : $3x + 6 = 5 - 4x$
On ajoute $-6 + 4x$ à chaque membre : $3x + 6 - 6 + 4x = 5 - 4x - 6 + 4x$
On simplifie les écritures de chaque membre :
$7x = -1$

$X = \frac{-1}{3}$

$\frac{-1}{3}$ est la solution de l'équation : $3\,(x + 2) = 5 - 4x$.

Exemple 4 :

On veut résoudre l'équation : $\frac{2}{3} x + \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

On retranche $\frac{4}{5}$ à chaque membre :

$$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{5}{10} - \frac{8}{10}$$

$$\frac{2}{3}x = -\frac{3}{10}$$

On multiplie chaque membre par $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2}x\ \frac{2}{3}x = \frac{3}{2} x \left(-\frac{3}{10}\right)$$

$$X = -\frac{9}{10}$$

$\frac{-9}{10}$ est la solution de l'équation : $\frac{2}{3} x + \frac{4}{5} = \frac{1}{2}$.

II- Mettre un problème en équation :

Une bouteille et son bouchon ont une masse totale de 110 g. La bouteille seule pèse 100 g de plus que le bouchon.

Quelle est la masse du bouchon ?

Si on répond sans réfléchir, on a envie de dire que la masse du bouchon est de 10 g, ce qui est faux. En effet, la bouteille pèserait 100 g de plus, donc 110 g, et au total la bouteille et le bouchon pèseraient 120 g (110 + 10 = 120). En réalité le bouchon a une masse de 5 g et la bouteille une masse de 105 g.

Comment résoudre un problème à l'aide d'une équation et éviter ce type d'erreur ?

1- Énoncé :

Pour fleurir un parterre, un jardinier plante des bulbes de tulipes. Le tiers des bulbes donnera des tulipes rouges, le quart donnera des tulipes blanches, le sixième donnera des tulipes noires et un autre sixième des tulipes jaunes. Enfin, il plante 3 bulbes de tulipes roses.

Combien de bulbes le jardinier a-t-il plantés ?

Soit x le nombre total de bulbes plantés ; x est un entier positif.

Remarques :

choisir une inconnue revient à imaginer qu'on connaît déjà la réponse ;

très souvent, il est commode de choisir comme inconnue ce qu'on demande de trouver (ici, le nombre de bulbes plantés).

2- Mise en équation :

Mettre le problème en équation revient à traduire l'énoncé en fonction de x.

Le jardinier plante : $\frac{1}{3}x$ tulipes rouges ; $\frac{1}{4}x$ tulipes blanches ; $\frac{1}{6}x$ tulipes noires ; $\frac{1}{6}x$ tulipes jaunes ; et enfin 3 tulipes roses.

Il a planté au total x bulbes de tulipes.

Exprimons d'une autre manière le nombre total de bulbes plantés, en faisant la somme des nombres de bulbes de chaque espèce : $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x +$ bulbes ont été plantés.

On a donc l'équation : $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + 3$.

3- Résolution de l'équation :

On regroupe tous les x dans le premier membre (ce qui revient à retrancher $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x$

dans les deux membres). On obtient : $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x = 3$.

Factorisons x dans le premier membre : $(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6})x = 3$

En réduisant au même dénominateur, on obtient : $(\frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} - \frac{2}{12})x = 3$

$\frac{1}{12}x = 3$.

On multiplie chaque membre par 12 : $x = 36$

Le jardinier a planté au total 36 tulipes.

En effet, il y a : 12 tulipes rouges ($\frac{1}{3} \times 36 = 12$), 9 tulipes blanches ($\frac{1}{4} \times 36 = 9$), 6 tulipes noires et 6 tulipes jaunes ($\frac{1}{6} \times 36 = 6$) et 3 tulipes roses.

On vérifie que : $12 + 9 + 6 + 6 + 3 = 36$.

4- Un problème géométrique : le bassin

Énoncé :

On souhaite creuser dans un parc un bassin rectangulaire entouré d'une allée de 2 m de large. La largeur du bassin est de 8 m.

Quelle doit être la longueur du bassin pour que l'aire du bassin soit égale à l'aire de l'allée ?

Soit x la longueur en mètres du bassin. x est un nombre positif.
Le bord extérieur de l'allée forme un rectangle (ABCD sur la figure 1). Sa largeur est de 12 m ($2 + 8 + 2 = 12$). Exprimons sa longueur à l'aide de x : sa longueur en mètres est $x + 4$ ($2 + x + 2 = x + 4$).

L'aire de ce grand rectangle en m² est donc : $12(x + 4)$.
L'aire du bassin est (en m²) : $8x$.

Dire que l'aire de l'allée est égale à l'aire du bassin revient à dire que l'aire du grand rectangle est le double de l'aire du bassin. On a donc l'équation : $12(x + 4) = 2 \times 8x$.

4- Résolution de l'équation :

Développons le premier membre. On obtient : $12x + 48 = 16x$
On regroupe tous les x dans le deuxième membre (ce qui revient à retrancher $12x$ dans les deux membres).
On obtient : $48 = 16x - 12x$
$48 = 4x$

On divise chaque membre par 4 :
$12 = x$

La longueur du bassin doit être de 12 m pour que les aires du bassin et de l'allée soient égales.
On vérifie en effet que l'aire du bassin est alors de 96 m² ($8 \times 12 = 96$) et que l'aire de l'allée est aussi de 96 m² ($(12 \times 16) - 96 = 96$).

III- Inéquation :

Les méthodes de résolution des équations et des inéquations se ressemblent ; cependant, contrairement aux équations qui n'ont le plus souvent qu'un nombre fini de solutions, une inéquation admet en général une infinité de solutions.

Comment déterminer et représenter une inéquation du premier degré à une inconnue ?

1- Définitions :

Une inéquation est une **inégalité** où figure une lettre appelée l'**inconnue.**

Rappel : les 4 symboles d'inégalité sont :

≤ qui se lit « inférieur ou égal à » ;

≥ qui se lit « supérieur ou égal à » ;

< qui se lit « strictement inférieur à » ;

> qui se lit « strictement supérieur à ».

Exemples : $2x - 8 \geq 6 - 3x$ et $7x + 2{,}1 < 45$ sont des inéquations d'inconnue x.

2- Résolution :

On dit qu'un nombre est une solution d'une inéquation si on obtient une **inégalité qui est vraie** quand on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'inéquation.

Exemple : considérons l'inéquation $2x + 3 > 5$.

Est-ce que 2 est une solution ?

Si on remplace x par 2 dans l'inéquation, on obtient : $2 \times 2 + 3 > 5$, soit $7 > 5$.

Cette inégalité est vraie, donc 2 est une solution.

Est-ce que 1 est une solution ?

Si on remplace x par 1 dans l'inéquation, on obtient : $2 \times 1 + 3 > 5$, soit $5 > 5$.

Cette inégalité est fausse, donc 1 n'est pas une solution.

Résoudre une inéquation, c'est trouver **toutes ses solutions**.

3- Méthode :

La méthode ressemble à celle utilisée pour les équations du premier degré à une inconnue, à une différence importante près. Rappelons en effet que dans une inégalité, on peut :

- ajouter ou soustraire un même nombre de part et d'autre du symbole d'inégalité ;

- multiplier ou diviser par un même nombre différent de 0 de part et d'autre du symbole d'inégalité, mais si ce nombre est **négatif,** il faut **changer le sens de l'inégalité**.

Exemples :

Exemple 1 : on veut résoudre l'inéquation $2x + 3 > 5$. Elle équivaut successivement à :

$2x > 5 - 3$

$2x > 2$

$x > 1$: la résolution s'achève à cette étape.

On remarque que cette inéquation admet une **infinité** de solutions qui correspondent à tous les nombres strictement supérieurs à 1.

Exemple 2 : on veut résoudre l'inéquation $4x - 1 \geq 7x + 11$.

Cette inéquation équivaut successivement à :

$4x - 7x \geq 11 + 1$

$-3x \geq 12$

$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{12}{-3}$: on notera le changement de sens de l'inégalité.

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -4.